

Convegno DI.FI.MA. 2015

**COSA SUCCEDE SE...**

**I. C. Pietra Ligure  
Scuola Sec. I gr. Borgio Verezzi**

**Anno Scolastico 2013/14  
Classe prima – 21 alunni  
6 incontri di 2 ore**

**Giulio ALLUTO, Alfonsina SIBILLA**

# LABORATORIO di matematica


- ALUNNO ATTIVO
- (gioca a fare “il matematico”)
- FORMULA IPOTESI
- PROGETTA
- SPERIMENTA
- DISCUTE con i compagni
- ARGOMENTA le proprie scelte

da INDICAZIONI NAZIONALI PER IL CURRICOLO...2012

# DIDATTICA LABORATORIALE

- APPRENDIMENTO SIGNIFICATIVO  
CONTESTUALIZZATO
- APPRENDIMENTO COOPERATIVO
- PROBLEM SOLVING
- PENSIERO CRITICO
- METACOGNIZIONE
- L'INSEGNANTE PERDE LA SUA  
CENTRALITA'... perché la lezione non è  
frontale e ... l'alunno non è un cestino da  
riempire di informazioni

# Metodologia del lavoro in classe

- 
- Lavoro in piccolo gruppo (2 o 3 alunni) su scheda predisposta
  - Discussione iniziale e trascrizione di varie proposte sulla lavagna
  - Scelta da parte degli insegnanti delle affermazioni sulle quali costruire una scheda di lavoro
  - Relazione individuale finale
  - Sintesi delle relazioni e costruzione di una relazione di classe

Supponi di avere un certo insieme di numeri naturali.

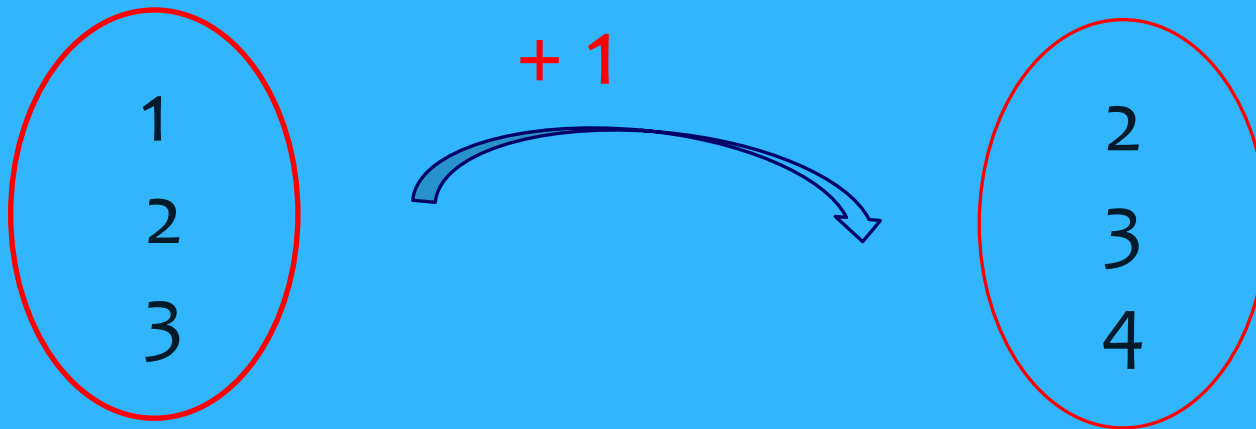
Ad ogni elemento dell'insieme applica la trasformazione  $+1$

Che effetto produce la trasformazione?

1) La comprensione del testo

2) Gli esempi e la rappresentazione del testo

# gli insiemi



$(1, 2, 3, 4)$



$(2, 3, 4, 5)$

# le tabelle

	+ 1
--	-----

numeri	+1
--------	----

numeri	numeri +1
--------	-----------

# LE CONGETTURE

- ogni numero cambia;
- I numeri diventano più alti, i numeri diventano maggiori, i numeri aumentano di 1;
- la forma scritta cambia aggiungendo 1; il modo in cui possiamo rappresentarli o scriverli cambia ;
- ogni numero naturale addizionato a 1 cambia l'unità oppure tutta la cifra es  $(39+1=40)$ ,  $(30+1=31)$ ;
- Con la trasformazione "+1" alcuni numeri del primo insieme appaiono anche nel secondo insieme



- se aggiungo 1 ai numeri pari diventano dispari e se lo aggiungo ai numeri dispari diventano pari;
- il numero cambia diventando il suo successivo sulla "linea dei numeri"
- mantengono sempre la stessa differenza tra loro (ad esempio  $23-15=8$ , quindi  $24-16=8$ !)
- se ci sono più numeri la crescita totale dell'insieme sarà maggiore invece se ci sono meno numeri la crescita sarà minore. Es: se ci sono 5 numeri la crescita totale sarà di 5 unità se invece i numeri sono 25 la crescita totale sarà di 25 unità;

# Che fare con tutte queste affermazioni?

- Argomentazione
- Vero – falso in matematica
- Proprietà dei numeri

Il 10 marzo avete eseguito la seguente consegna:

“Supponi di avere un certo insieme di numeri naturali; a tutti gli elementi dell'insieme applica la trasformazione “ $+1$ ”. Che effetto produce la trasformazione? Perché?”

Ecco i testi relativi agli effetti della trasformazione “ $+1$ ” proposti da tre compagni:

- A *“durante la trasformazione il numero cambia diventando il suo successivo nella linea dei numeri”*
- B *“con la trasformazione “ $+1$ ” alcuni numeri del primo insieme appaiono anche nel secondo insieme”*
- C *“se aggiungo 1 ai numeri pari diventano dispari e se lo aggiungo ai numeri dispari diventano pari”.*

Secondo te, tra le precedenti, ci sono affermazioni vere per tutti i possibili insiemi di numeri naturali?

Motiva la risposta

# Le affermazioni sicuramente vere

A *“durante la trasformazione il numero cambia diventando il suo successivo nella linea dei numeri”*

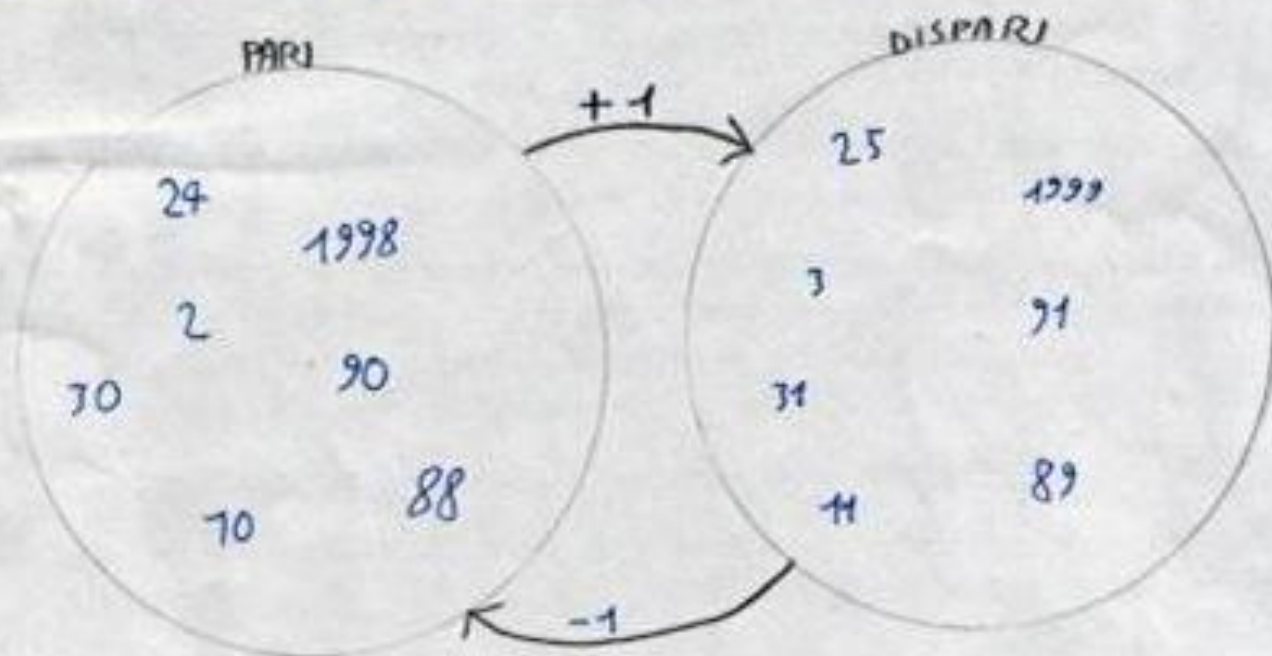
C *“se aggiungo 1 ai numeri pari diventano dispari e se lo aggiungo ai numeri dispari diventano pari”*

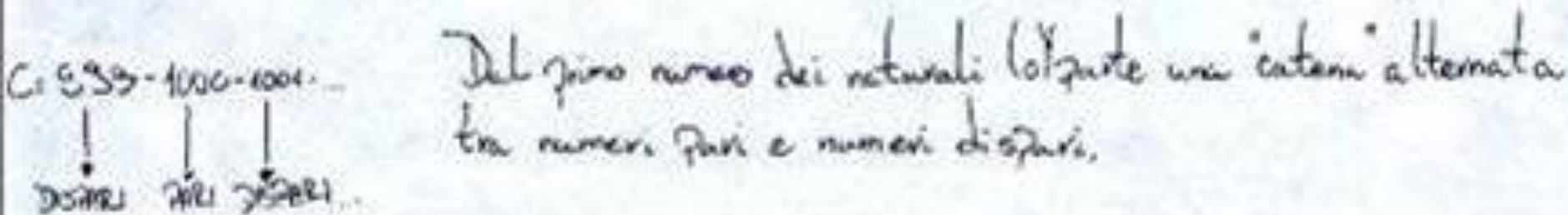
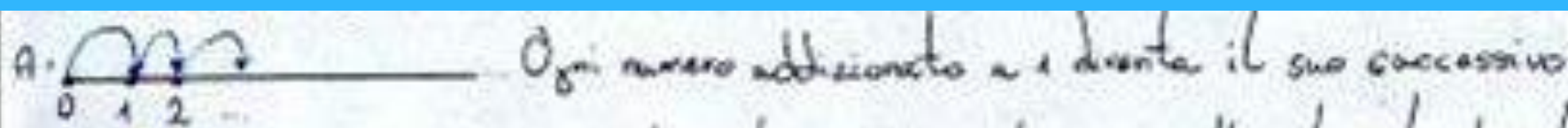
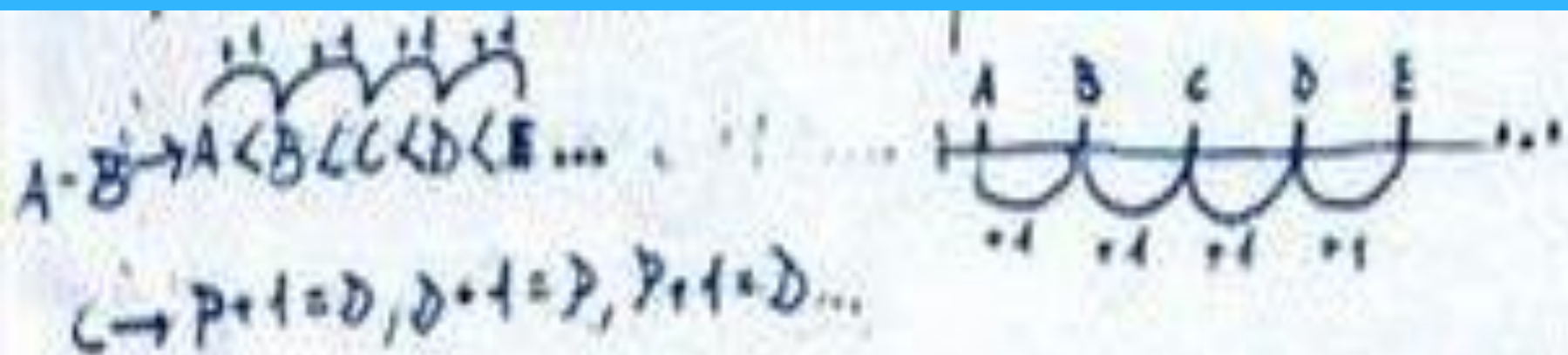
\* I numeri diventano successivi al precedente aggiungendo 1.  
 1: Esempio

LA B PERU



Se 1 perché se aggiungo 1 a un numero pari esso diventa dispari.





# Dalla relazione di classe

Tutti eravamo d'accordo che le due affermazioni erano valide.  
Dovevamo però motivare il perché.

*A Ogni numero del secondo insieme è il successivo di ogni numero del primo.*

Questa affermazione si basa sulla seguente proprietà dei numeri naturali: per ogni numero naturale, esiste il numero naturale successivo, che si ottiene aggiungendo 1 (Luca e Mattia)

*B I dispari si trasformano in pari e viceversa.*

Questa affermazione si basa sul fatto che tutti i numeri naturali sono o pari o dispari e che dal primo numero naturale (0) parte una "catena" alternata di numeri pari e numeri dispari (Luca e Camilla)

# ASSIOMI DI PEANO

- 1 Esiste almeno un numero naturale, 0
- 2 Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
- 3 Numeri diversi hanno successori diversi
- ...



Con la trasformazione “+1” alcuni numeri del primo insieme appaiono anche nel secondo insieme

comprensione testo

No, perché dipende da che numeri dipendono es :

	+1	
3	4	6 e 3 non appaiono 2 volte, ciò dimostra che non è sempre vera
5	6	
4	5	

Con la trasformazione “+1” alcuni numeri del primo insieme  
appaiono anche nel secondo insieme

Affermazione vera

Sì, perché se hai

	+1
3	4
4	5
5	6

vorrà dire che vale per tutti i numeri

Con la trasformazione “+1” alcuni numeri del primo insieme appaiono anche nel secondo insieme

Affermazione vera a volte sì, a volte no

Può essere vera e può essere falsa perché se l'insieme non è consecutivo, nel secondo insieme non ci sarà nessun numero del primo insieme presente. Può essere vera se i numeri sono consecutivi

	+1
1	2
2	3
3	4

← vera

	+1
5	6
10	11
15	16

← falsa

alla lavagna



1)

1	2
2	3
3	4
4	5

l'affermazione è vera

- 2) l'affermazione è falsa perché non è detto che vi siano nel primo e nel secondo insieme alcuni numeri uguali
- 3) l'affermazione è vera se nel primo insieme compaiono numeri consecutivi tra loro


per essere vera ci  
devono essere numeri  
consecutivi, per  
essere vera; se siete  
d'accordo che va bene  
la terza, allora la  
mia è sbagliata

No, per caso ho  
pensato a numeri  
consecutivi


sono partiti dal  
presupposto che  
fosse vera e hanno  
cercato un esempio  
per provarlo

io li ho messi a casaccio,  
non ho pensato che erano  
consecutivi. Non ho pensato  
che se mettevo numeri non  
consecutivi come 7 e 20 le  
cose cambiavano

Riflessione sul perché delle scelte sbagliate



la terza è  
quella  
giusta

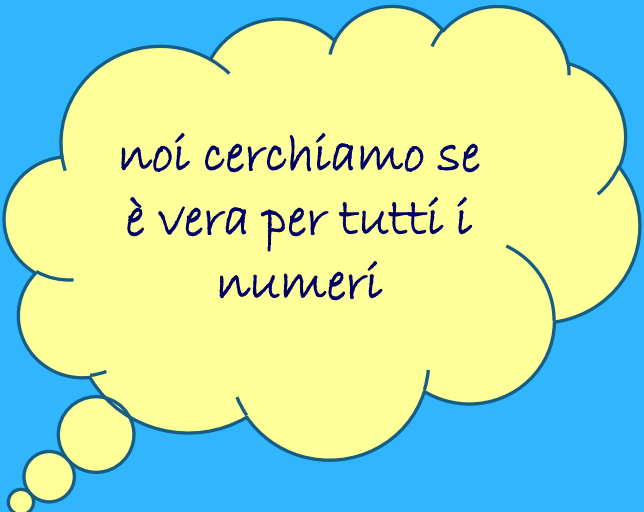


la terza è  
va bene

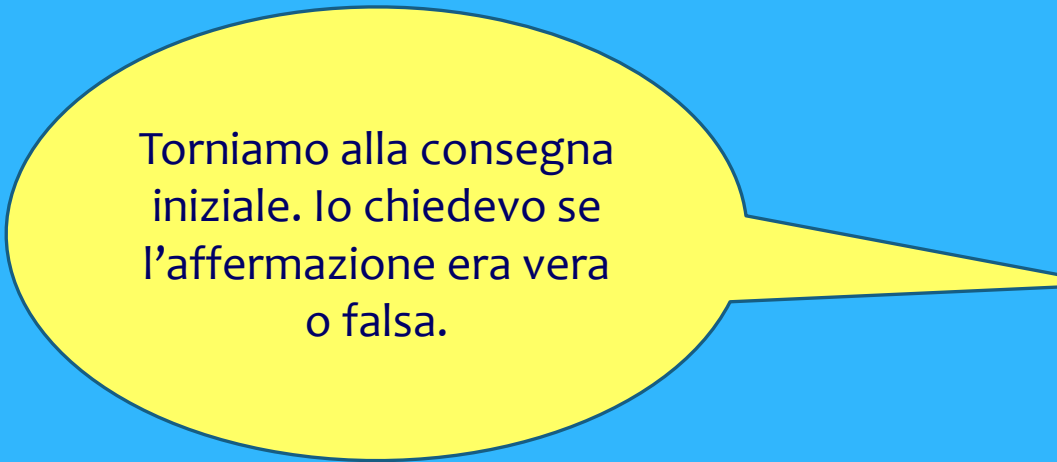


Scegliamo  
la terza

3) l'affermazione è vera se nel primo insieme  
compaiono numeri consecutivi tra loro



noi cerchiamo se  
è vera per tutti i  
numeri



Torniamo alla consegna  
iniziale. Io chiedevo se  
l'affermazione era vera  
o falsa.

io ho scritto che  
l'affermazione è vera se nel  
primo insieme compaiono  
numeri consecutivi tra loro



però pensando che deve  
essere vera per tutti i  
numeri mi è venuta  
un'idea:...

mi basta un esempio che  
mostrí che non è vera,  
per esempio 3, 10, 12

**Il ruolo dell'esempio e il significato del controesempio**



La differenza tra due numeri dell'insieme iniziale è uguale alla differenza di quei due numeri trasformati con la trasformazione  $+1$

se facciamo  
un  
esempio...

con un esempio  
si riesce a capire  
qualcosa che a  
volte è difficile  
spiegare con le  
parole

non si possono  
fare infiniti  
esempi

per dare un'idea di  
quello che vuoi dire,  
spiegare, serve un  
esempio, ma poi  
entrare nei dettagli,  
che è giusto

Ci vuole una  
regola  
generale

# LA DIMOSTRAZIONE



la proprietà  
invariantiva  
della  
sottrazione!

“aggiungendo o togliendo lo stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo il risultato non cambia”, nel nostro caso abbiamo aggiunto 1.

Quale trasformazione devi applicare agli elementi dell'insieme affinché l'insieme trasformato sia costituito solo da numeri pari?

SECONDO ME DEVI METTERE TUTTI I NUMERI  
DISPARI DA UNA PARTE POI CI AGGIUNGI  
1 E DIVENTANO TUTTI PARI. PER CERTO;

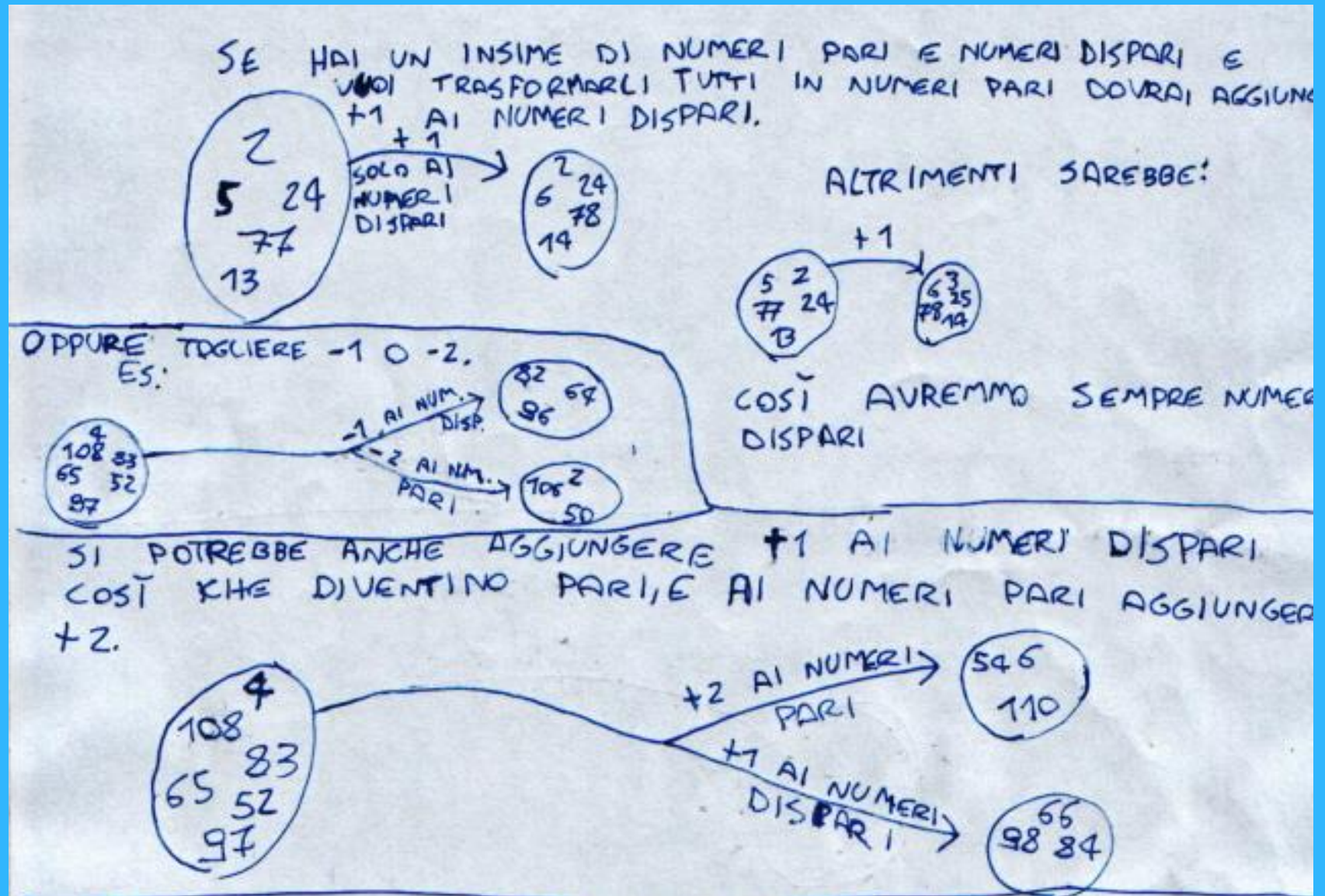


OPPURE POSSO RADDOPPIARE I NUMERI PARI. PER

ESEMPIO

2 DIVENTA 4 CHE È SEMPRE  
PARI

Quale trasformazione devi applicare agli elementi dell'insieme affinché l'insieme trasformato sia costituito solo da numeri pari?

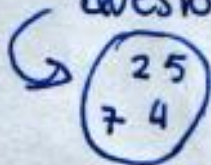




Quale trasformazione devi applicare agli elementi dell'insieme affinché l'insieme trasformato sia costituito solo da numeri pari?

Scrivi tutti i tentativi e i ragionamenti che fai

Questo è l'insieme iniziale



ora devo trasformarlo da un insieme qualsiasi in un insieme di numeri pari. Iniziamo provando con un esempio: (solo per dare un'idea)



$$5 + 5 = 10$$

$$7 + 7 = 14$$

Proviamo addizionando i numeri dispari per loro stessi.

Proviamo a fare un altro esempio per capire meglio:



$$4 \cdot 2 = 7 \cdot 2$$

$$5 \cdot 2 = 8 \cdot 2$$

Moltiplicando i numeri per due diventano tutti pari. Quindi la risposta giusta è la ②

Quale trasformazione devi applicare agli elementi dell'insieme affinché l'insieme trasformato sia costituito solo da numeri pari?

Scrivi tutti i tentativi e i ragionamenti che fai

osservando uno a uno i numeri del insieme dovremo aggiungere  $+1$  ai numeri dispari di modo che diventino pari (si può fare qual numero basta che il dispari si trasformi in un numero par.) e invece ai numeri del insieme basterebbe non applicare nessuna trasformazione o una trasformazione che lo lasci sempre pari.

Basterebbe ad ogni numero del nostro insieme moltiplicarlo per 10 infatti si deciderà se un numero è pari o dispari leggendo l'ultima cifra la moltiplicazione aggiunge come ultima cifra 0 cioè un numero pari di conseguenza tutto il numero diventerà pari.

## alla lavagna

1. Si sa che un numero è pari o dispari leggendo l'ultima cifra; moltiplicando ogni numero per 10, si ottiene un insieme di numeri pari, infatti l'ultima cifra di tutti i numeri del secondo insieme è 0, che è pari
2. Se moltiplico per 2 ogni numero dell'insieme, il risultato sarà un numero pari, perché è divisibile per 2
3. Per ottenere un insieme di numeri pari ogni numero deve essere addizionato a se stesso



2 e 3 dicono la  
stessa cosa

no, perché  
le  
operazioni  
sono  
diverse

sì, perché i  
risultati sono  
uguali,  
ad esempio  
 $3 \times 2 = 6$  e  
 $3 + 3 = 6$

non puoi fare  
solo un  
esempio

la  
moltiplicazione  
non è altro che  
una addizione  
ripetuta



1) Si sa che un numero è pari o dispari leggendo l'ultima cifra; moltiplicando ogni numero per 10, si ottiene un insieme di numeri pari, infatti l'ultima cifra di tutti i numeri del secondo insieme è 0, che è pari

2) Se moltiplico per 2 ogni numero dell'insieme, il risultato sarà un numero pari, perché è divisibile per 2

secondo me  
queste due  
affermazioni non  
sono equivalenti,  
perché penso  
questo?

perché la 2  
specifica che un  
numero pari è  
divisibile per 2

anche  
l'affermazione  
1, l'ho scritta  
io, si basa su  
un  
ragionamento

Secondo voi un  
matematico  
quale  
preferirebbe?

La 1 spiega  
con più  
precisione che  
se l'ultima  
cifra è pari il  
numero è pari

la 1 è più  
facile da  
praticare

io vorrei dire la  
seconda perché dice  
un numero pari è  
divisibile per 2, per  
cui io sono certo che  
moltiplicando per 2  
ho un pari

la seconda perché la  
prima è banale, è  
ovvio che per capire se  
un numero è pari o  
dispari devo  
guardare la sua  
ultima cifra

## distinzione tra regola e definizione

i matematici potrebbero  
anche dividersi,  
qualcuno per la 1 e  
qualcuno per la 2

io non so per un  
matematico, ma io  
preferirei sicuramente  
la 1 perché è più facile

# la definizione di numero pari

un numero  
che si può  
dividere per  
2

ma  
senza i  
decimali

un numero  
che compare  
nella  
tabellina del  
2

un multiplo di  
2

il successivo di  
un numero  
dispari

flessibilità nella connotazione designativa

## le tabelle e l'introduzione della lettera

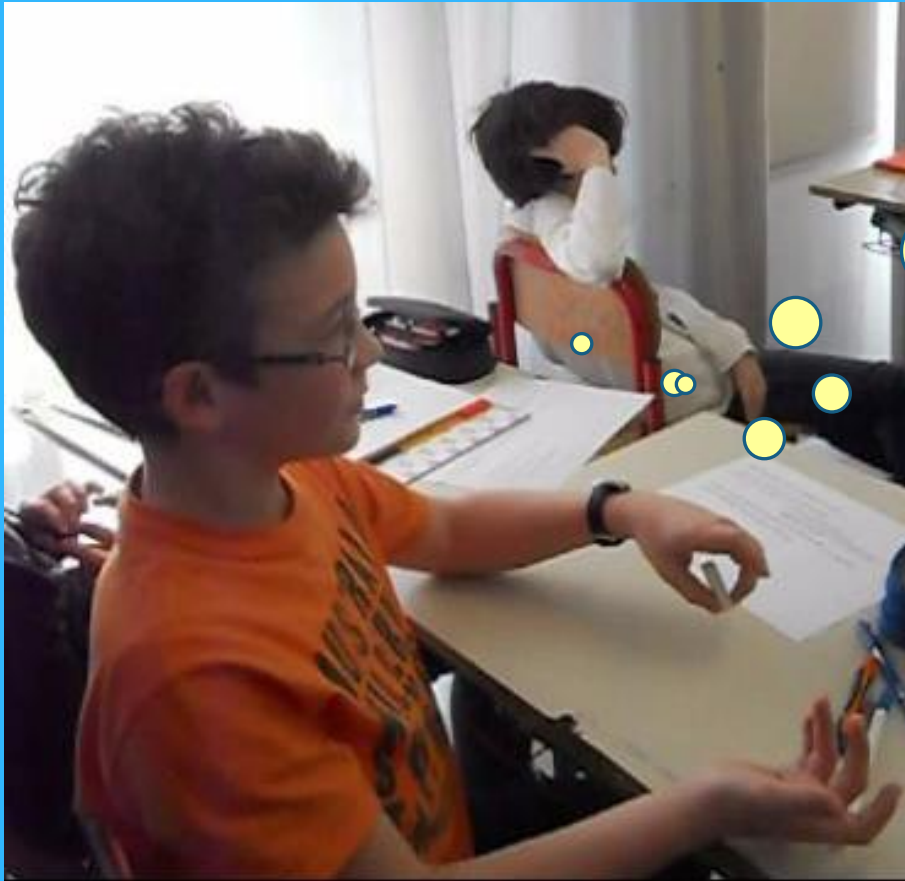
1. trasformazione "x10"
2. trasformazione "x2"

10n	
10*n	
n	10xn
1	10x1 = 10
2	10x2 = 20
3	10x3 = 30
4	10x4 = 40
...	

2n	
n	2n
1	2x1 = 2
2	2x2 = 4
3	2x3 = 6
4	2x4 = 8
...	

*La trasformazione x2 è più "potente", della trasformazione per 10!*

“quale trasformazione devi applicare agli elementi dell'insieme affinché l'insieme trasformato sia costituito solo da numeri dispari?”



io non ero riuscito  
a trovare la  
trasformazione  
unica, ho provato  
anche con la radice  
quadrata

un dispari è il  
numero  
successivo di un  
pari

dobbiamo trasformare  
prima in pari tutti i  
numeri e poi  
aggiungere 1

La trasformazione quindi è  $x^2+1$



# cosa succede se addiziono un numero pari ad un numero dispari?

① SE ADDIZIONO UN NUMERO PARI AD UN NUMERO DISPARI IL RISULTATO SARA' DISPARI. PERCHE':  
 $8+9=17$ ;  $12+13=25$ . VISTO CHE NON C'E' IL CONTROESEMPIO L'AFFERMAZIONE E' GIUSTA. ~~QUINDI~~

SECONDO ME PUO' DIVENTARE UN NUMERO DISPARI.

ESEMPIO:

$$1+2=\underline{3}; 3+4=\underline{7}; \underline{12}+1=\underline{13}; 13+4=\underline{17}; 14+2=\underline{16};$$

$$\begin{array}{r|l} 2m & 2m+1 \\ 4 & 8+1=\underline{9} \end{array}$$

$$8 \quad 16+1=\underline{17}$$

$$6 \quad 12+1=\underline{13}$$

$$23+4=\underline{27}; 11+6=\underline{17};$$

LA MIA IPOTESI SI E' RISULTATA VERA PERCHE' UN NUMERO DISPARI ADDIZIONATO A UN NUMERO PARI DUEVA DISPARI.

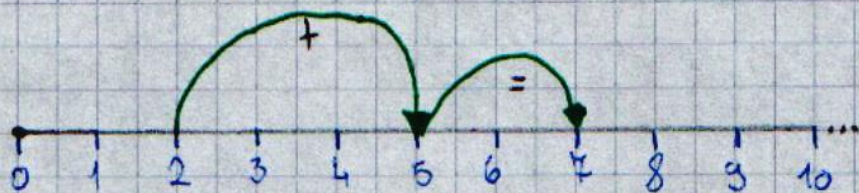
IN FORMA MATEMATICA:

$$2m + 2m+1 = 2m+1 \text{ (C'E' UN NUMERO DISPARI)}$$



1. COSA SUCCEDDE SE ADDIZIONO UN NUMERO PARI AD UN NUMERO DISPARI

Addizionando un numero pari a uno dispari ogni risultato sarà un numero dispari, quindi non divisibile per 2 nell'insieme  $\mathbb{N}$



$$p + d = d$$

$$4 + 11 = 15$$

$$2 + 5 = 7 \text{ numero dispari}$$

$$10 + 13 = 23$$

Questo succede perché, sulla linea dei numeri, tra 2 numeri dispari c'è sempre la differenza uguale a un numero pari.







Postulato :  $\text{dispari} + \text{dispari} = \text{pari}$

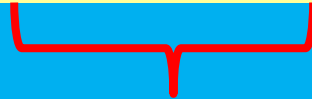
Definizione :  $\text{pari} = \text{dispari} + 1$

$\text{dispari} + \text{dispari} + 1$



pari

$= \text{pari} + 1$



dispari

Il ragionamento di Luca

Es. 1 Se addizioniamo un numero pari ad un numero dispari otteniamo un numero dispari perché è come se addizionassimo due numeri pari la cui somma è pari e poi ci aggiungessimo 1 (visto che un numero dispari è il successivo di un numero pari) il risultato è dispari. Es.  $2+5=7$  /  $2+5=2+4=6+1=7$        $P+D=P+P=P+1=D$

Premessa :  $\text{pari} + \text{pari} = \text{pari}$

Definizione :  $\text{dispari} = \text{pari} + 1$

$$\text{pari} + \text{dispari} = \text{pari} + \text{pari} + 1$$

pari per la  
premessa

$$= \text{pari} + 1 =$$

d

per definizione

il ragionamento di Diego

## Dalla relazione di classe

... Nella scrittura di Diego con il termine pari si intendono numeri pari diversi.

Alfonsina ci ha fatto vedere la traduzione del ragionamento di Diego con il linguaggio simbolico della matematica: la traduzione di pari è  $2n$ , quella di dispari  $2n + 1$ , sappiamo però che ad una identica lettera devo sempre sostituire lo stesso numero, l'affermazione non parla di pari e dispari consecutivi, per cui non posso scrivere  $2n + 2n + 1$ ,

devo perciò cambiare una lettera,

posso scrivere per esempio per il numero dispari  $2a + 1$ , quindi la traduzione dell'addizione di un pari qualsiasi e di un dispari qualsiasi è  $2n + 2a + 1$ .

$2n + 2a$  per la proprietà distributiva si trasforma in  $2(n + a)$ , che sicuramente è un numero pari perché multiplo di 2, perciò  $2n + 2a + 1 = 2(n + a) + 1$  questo risultato è il successivo di un pari per cui è un dispari. Ho dimostrato così che la somma di un pari e di un dispari è sicuramente un dispari.

**Esercizio:** se  $n = 3$  e  $a = 5$ , quanto vale  $2n + 2a + 1$ ?

cosa succede se addiziono due numeri dispari consecutivi?

Se addiziono due numeri dispari consecutivi il risultato è pari (17 su 22)

Se addizioniamo due numeri dispari consecutivi il risultato pari diviso per 2 fa il numero pari in mezzo a quei due numeri dispari sommati 3 su 22

Addizionando due numeri dispari consecutivi otterrò un numero divisibile per 4

Se addizioniamo due numeri consecutivi, il numero sarà sempre pari, perché il numero del risultato è la tabellina del 4

Uscirà sempre un numero pari e se diviso per 2 usciranno due numeri (gli stessi) che sono il numero che sta in mezzo hai due numeri dispari usati

$$\text{es. } 7+9 = 16 \quad 16:2 = 8$$

Infatti accade perché un dispari usato è superiore di uno mentre l'altro inferiore di uno lasciando il risultato uguale

## cosa succede se addiziono due numeri dispari consecutivi?

La maggioranza della classe ha risposto che la somma di due numeri dispari consecutivi è un numero pari. L'affermazione è vera, però è ovvia, infatti già sappiamo che la somma di due dispari qualsiasi è pari.

Anabel e Alexandra hanno prodotto la seguente congettura: “la somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4”

Provate a dimostrare questa affermazione utilizzando il linguaggio matematico: se il primo dispari è  $2n + 1$ , il dispari consecutivo è..... ,

la loro somma è..... ,

se la trasformo per la proprietà distributiva ottengo:

.....  
.....  
.....

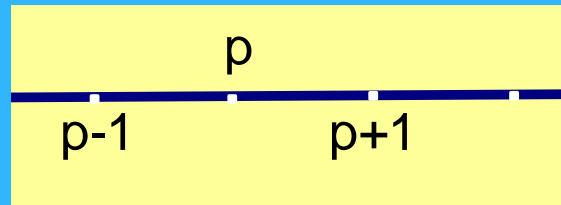
Luca, Diego e altri hanno prodotto la seguente congettura:

“la somma di due dispari consecutivi è il doppio del numero che sta tra i due dispari”

Luca ha incominciato a dimostrare la verità dell'affermazione in questo modo: un dispari è il precedente di un pari, il dispari consecutivo è il successivo dello stesso pari...

Provate a proseguire la dimostrazione di Luca sia a parole sia con il linguaggio matematico.





$$p-1 + p+1 = p + p = 2 \text{ volte } p = 2p$$

## Abilità sviluppate durante lo svolgimento del progetto “Cosa succede se....”

- 1) produzione congetture e loro motivazione  
(formulare ipotesi e argomentare)
- 2) valutazione della verità di ogni congettura:  
attraverso esempi di vario tipo si esplora la situazione
  - se si trova il controesempio, l'affermazione è falsa
  - se non si trova il controesempio e si pensa che l'affermazione sia vera, si cerca un ragionamento, basato su proprietà o su fatti certi, che giustifichi la verità dell'affermazione per tutti i numeri
- 3) miglioramento del testo delle congetture vere (chiarezza, sintesi, uso di termini specifici, generalità, ... )
- 4) traduzione nel linguaggio simbolico, ad esempio: numero pari  $2n$ ,  $d + 1$   
numero dispari  $2n+1$ ,  $2n-1$ ,  $p+1$   
(usare il linguaggio specifico)

# LA ZONA DI SVILUPPO PROSSIMALE... per apprendere!

